連立代数方程式の解の重複度(非線形問題の数値解析)

小林, 英恒; 鈴木, 秀男

数理解析研究所講究録
787 巻 1992 年 99-112

連立代数方程式の解の重複度

日大・小林　英恒　東京職業訓練短大・鈴木　秀男
(Kobayashi, Hidetsune)　　(Suzuki, Hideo)

連立代数方程式の解の重複度を数値計算によって求める方法を示す．解の重複度を連立代数方程式から自然に決まる，代数的対応の重複度に翻訳し，これをゾイタンの法則に当てはめて計算する．

この報告の１節では，自然な代数的対応関係を定義し，Zeuthenの法則を用いて解の重複度を求める方法について述べる．２節では，数値計算の方法について簡単に述べ，３節で，計算例を紹介する．

１．Zeuthen の法則と解の重複度

まず，簡単に代数的対応について紹介する．$f(x, y)$ を xについて n次， yについて m次の多項式とする． aを一つの複素数とするとき，

$$f(a, y) = 0$$

の解が $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ であるとすると， aに $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ を対応させる対応関係を代数的対応という． aに m個の数が対応し，逆に bに n個の数が対応することからこの代数的対応は (n, m) 対応であるという． aに対応する数のうちに a自身が含まれれば

$$f(a, a) = 0$$

となる．従って，このような数は，$n + m$ 個存在する．空間の点の代数的対応に関しては [1] p.　を参照されたい．

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,\ f_i \in C[x_1, x_2, \cdots, x_n] \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

を与えられた連立代数方程式とする．

$$F_i(X_0, X_1, \cdots, X_n) = X_0^{\deg f_i} f_i(X_1/X_0, X_2/X_0, \cdots, X_n/X_0),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

とおいて斉次化することによって，以下の議論はすべてｎ次元射影空間ですすめる．この

ようにおくときBezoutの定理により解の個数は，方程式を与える多項式の次数の積となり，理論を進めるのが簡単となる．また，元の方程式の解は無限遠解ではなく，重複度は元のそれと変わらない．

以下記号［ r ］は r 次元 linear space を表す．つまり，［ r ］は独立な n-r個の超平面の交わりのことである．まず，重複度を調べるための道具となる代数的対応を作ることから始める．超曲面 $f_1 = 0$ をＦとおき，曲線 $f_2 = f_3 = \cdots = f_n = 0$ をＣとおく．Ｆにもにものらない一般の点Ｏを取る．Ｃ上の点Ｐが与えられたとき，ＯＰとＦとの交点の一つをＱ，直線ＯＰを l とおき，

（Ｐ，Ｑ； l ）

の全体をΣ_1とおくと，Σ_1は代数的対応関係Ｐ→Ｑを定める．この対応関係の指標（α，β；γ）は，次のように定義される．

α：［n-1］を与えたとき，$P \in$［n-1］なる(P, Q; l) $\in \Sigma_1$ の個数．

β：［n-1］を与えたとき，$Q \in$［n-1］なる(P, Q; l) $\in \Sigma_1$ の個数．

γ：［n-2］を与えたとき，$l \cap$［n-2］$\neq \phi$ なる(P, Q; l) $\in \Sigma_1$ の個数．

$\deg f_i = d_i$ とおくとき，次の命題が成立する．

命題　$\alpha = \beta = \gamma = d_1 d_2 \cdots d_n$ である．

証明　Ｃの orderは$d_2 d_3 \cdots d_n$ であるから，［n-1］との交点は$d_2 d_3 \cdots d_n$ である．この交点のうちの一つをＰとおくとき，ＯＰとＦとの交点はＦの orderがd_1であることから，d_1個である．よって，（Ｐ，Ｑ；l ）$\in \Sigma_1$ は $d_1 d_2 \cdots d_n$ 個だから，$\alpha = d_1 d_2 \cdots d_n$

［n-1］とＦとの交わりは order d_1の代数多様体で，これを底としＰを頂点とする錐とＣとの交点は $d_1 d_2 \cdots d_n$ である．よって，$Q \in$［n-1］なる（Ｐ，Ｑ；l ）$\in \Sigma_1$ の個数は $d_1 d_2 \cdots d_n$ であるから，$\beta = d_1 d_2 \cdots d_n$ ．

［n-2］を勝手に与えたとき，$l \cap$［n-2］$\neq \phi$ とする．$O \in l$ で，$O \in$［n-2］としてよいから，結局 l は超平面$O \cup$［n-2］に含まれることになる．$O \cup$［n-2］$\ni$ Ｐなる（Ｐ，Ｑ；l ）$\in \Sigma_1$ の個数は$d_1 d_2 \cdots d_n$ だから，$\gamma = d_1 d_2 \cdots d_n$ ．

定理　Σ_1 の指標が（α，β；γ）のとき，Ｐ＝Ｑとなる（Ｐ，Ｑ；l ）$\in \Sigma_1$ の個数は

, $\alpha + \beta - \gamma$である.

証明　一般の位置に［n-2］をとり，これをH’とおく．H’を通る［n-1］に対し，（P，Q；l）をP∈［n-1］ととり，これにQ∪H’を対応させるとH’を通る超平面の束の代数的対応が出来る．H’を通る超平面の束は，一つのパラメタで表示できるから，この代数的対応は，複素数の対応と思って良い．

一つの［n-1］を与えると，P∈［n-1］なる（P，Q；l）$\in \Sigma_1$ の個数はαで，このα個のQをとおる［n-1］=Q∪H’が最初の［n-1］に対応する．このことをもう一度繰り返して考えると，この数の対応は，（β，α）対応となる．従って一致する超平面の個数は$\alpha+\beta$個である．

他方，H’をとおる［n-1］に同じ［n-1］が対応するのは，（P，Q；l）に於いてP＝Qのときかl∩H’$\neq \phi$のときである．よって，P＝Qとなるのは，

$\alpha + \beta - \gamma$個

である．

系　上の対応関係で重複度をいれて考えれば，解の個数はちょうど$d_1 d_2 \cdots d_n$ となる．

上の定理の証明を見れば，超平面の束の対応関係の重複度を，連立代数方程式の解の重複度と定義すれば良いことが分かる．すなわち，Aを連立代数方程式の一つの根とするとき，［n-2］∪A上には，他の連立代数方程式の解が無く，かつP→Aのときの極限の（P，Q；l）のlが乗っていないように［n-2］を適当に選び，代数的対応関係Σから決まる超平面の束の対応関係の点Aに関する部分の重複度を調べれば，超平面の束の対応関係の重複度と根Aの重複度が一致する．ここで，［n-2］を一般の位置に選びさえすれば，連続性により，選び方によって重複度が変わることはない．

次に，数の代数的対応関係の重複度を調べるための Zeuthenの法則を示す．

定理　(Zeuthen's Rule)

ある代数的対応が与えられたとする． xに対応する$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$のうち，$\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$が， $x \to a$なら $y_1, y_2, \cdots, y_s \to a$となるとき，点 aの重複度は

$y_1 - x, \cdots, y_s - x$ の無限小の程度を，無限小 $x - a$を基準に測った値の和に等しい．（［1］，P. 70）

この法則を応用するためには，連立代数方程式の解Aをとおる一般の位置にある直線を一本引きこれを固定する．点Aをこの直線の原点と思うことにする．原点から距離 hの直線上の点Gと一般に取られた［n-2］とで，生成される超平面と曲線Cとの交点のうちAに近いものを全て求める．どの範囲のものを全て求めるかは，次の節で述べるとして，いまこれらの点を$P_1, P_2, \cdots, P_r$ とおく．各P_i 0 とFとの交点を Q_{ij}とし Q∪［n-2］が固定された直線と交わる点と点Gの間の距離を q_{ij}とするとき，

$h^{e_{ij}} = c \mid q_{ij} \mid$となる e_{ij}を求めて，それらをすべて加えれば重複度が得られる．ここに，c は h， q_{ij}に関係しない定数であり，２つの hを考えることにより除去できる．

２．重複度の計算アルゴリズム

この節では，連立代数方程式の解を求め，それの重複度を求めるために用いた方法を紹介する．

１）　与えられた連立代数方程式の根を求める：

適当な初期値を与え，ホモトピー法により根を求める．与えられた連立代数方程式は高々３変数のものを考えているので，ヤコビアンの逆行列を求めるのに数式処理を用いた．微分方程式

$$\dot{x} = -(\mathrm{Jac})^{-1} F, \quad F = {}^t(f_1, f_2, f_3)$$

の数値積分は，Adams-Bashforth-Moulton法を用いた．得られた解の一つをAとおく．

２）　［3-2］を与えるため２点(x, y, z) と(x', y',z') とを与える．実際問題この与えた［3-2］が一般の位置にあるかどうかは，試さなくても良いほどであるが，念のため［3-2］∪A 上に他の解が乗っていないことをためす．解が乗っていれば，最初に与えられた２点を適当にずらして解が乗っているかどうか再度確認する．

３）　$A = (a_1, a_2, a_3)$の近くに $h = (h_1, h_2, h_3)$を取り，2)の［3-2］と hとで生成される［2］と曲線 $f_2 = f_3 = 0$との交点を求める．このとき，$\deg(f_2) = d_2$, $\deg(f_3) = d_3$ とおくと

$$|x - a_1| \sim |h_1 - a_1|, \ |y - a_2| \sim |h_1 - a_1|^{1/d_2 d_3}, \ |z - a_3| \sim |h_1 - a_1|^{1/d_2 d_3}$$

の範囲で解を求めれば良い．なぜなら，曲線の分枝は高々$d_2 d_3$本であるから，A の近くで

は局所助変数表示は $(x,\ bx^{1/d_2d_3}+\cdots,\ cx^{1/d_2d_3}+\cdots)$の形となっているからである．（ここに，b，cは定数）

この交点を求めるにあたって，最初に与えられた代数方程式が２変数のときには，この交点を与える代数方程式は，一変数となるのでニュートン法で全ての解を求めた．最初に与えられた代数方程式が３変数のときには，交点をあたえる連立代数方程式を実部と虚部とに分け，領域をメッシュに分け各メッシュに解が存在するか否かをスツルムの方法で調べる．解が存在すれば，ニュートン法でそのメッシュの全ての解をおおよその精度で求める．この解を初期値としてさらに，ホモトピー法で厳密解を求める．求めた点のうち h→A でも， P→A とならないものがあるが，複数の hを考えれば，このような点を除去する事が可能である．また，適当な値の範囲を越えるものは取り除くようにしてもよい．

４）点 Oを曲線上にも，曲面上にもないように取り，直線OP_i と曲面との交点を Q_{ij} とおく．点 Aをとおる直線 l を［3-2］に直交する向きの一つにとり，［3-2］ hとこの直線の交点 Hの Aからの距離を hとおく．（［3-2］∪Q ）∩l と Hとの距離を q_{ij}とおくと，

$$h^{\alpha_{ij}} = c\ |q_{ij}|$$

のα_{ij}を求める．次に hを変えて同様にαをもとめ，前の値と比較して，定数 cを除去する．除去した後の指数の総和が求める重複度となる．

Aは単根とは限らないから，精度の点で問題がおこる．したがって， hは qと異なり誤差を含む．この誤差をΔh とおくと，$\alpha = \log q / \log(h + \Delta h)$となる．$\log(h + \Delta h) = \log h + \Delta h/h + \ldots$ であるから， P→A なら， Q→A となる点P，Q で考えると log q ，log h 共整数の程度であるが，$\Delta h/h$ は小数であるのでαの値にはあまりきいてこない．実際必要なのはこのような点なのである．h →A でも P→A とならない点では，αの値は，殆ど全ての場合非常に小さな値となる．なぜなら， qはほぼAPの距離と同程度であり， hが十分小さいと，log q/log h は小さい値となる．従って，このような不要の点も一緒に計算しても，結果にはほとんど影響してこない．

３．計算の例

２変数の連立代数方程式の解の重複度は，余り次数が高くなければ，数式処理によって解の回りでの助変数表示を求めることができ，重複度を正確に計算することができる．まず，数式処理によって結果が正しいことが確かめられたものから示すことにする．

例１．曲線 $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$ と $2x^4-3x^2y+y^4-2y^3+y^2=0$ との交点(0,0)． 重複度は８．第２式の (0,0)のまわりの無限級数展開は

$$2x^2+16x^4+\ldots\quad \text{と}\quad x^2-2x^4+\ldots$$

である．従って， (0,0)の重複度は， 8である．multiplicity' は定数 cを除去する前の値で，その下の multiplicity が上の２つから定数を除去したものである．

計算時間は一つの multiplicity をもとめるのに１．３秒．(cpu mc68030, 25mh, os UNIX,以下同様)

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	7.208272	7.585311	7.519342	7.585311
multiplicity	7.962350		7.957631	
h	0.01	0.001	0.002	0.001
multiplicity'	7.585311	7.718583	7.688143	7.718583
multiplicity	7.985127		7.991507	

例２．曲線 $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$ と $x^6-x^2y^3-y^5=0$ との交点 (0,0)．重複度は１６．後者のピュイズー級数展開は

$$x^{4/3}-x^2/3+\ldots,\quad \omega x^{4/3}-x^2/3+\ldots,\quad \omega^2x^{4/3}-x^2/3+\ldots$$

と $\pm ix+x^2/2+\ldots$,である．ここに，ωは１の原始３乗根である．この展開をみても分かるように，この例では，複素根を求める必要が生じる．

計算時間４．３秒．

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	15.08099	15.45520	15.37958	15.45520
multiplicity	15.82942		15.88203	
h	0.01	0.001	0.002	0.001
multiplicity'	15.4552	15.62073	15.58477	15.62073
multiplicity	15.95180		15.94320	

例3．曲線 $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ と $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$

との交点のうち原点の重複度．正確には２２．

計算時間１６．９秒．

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	21.76422	21.98819	21.97398	21.98819
multiplicity	22.21216		22.06839	
h	0.01	0.001	0.002	0.003
multiplicity'	21.98819	22.05846	21.99920	22.00568
multiplicity	22.19901		21.90643	

以上は，２変数の代数方程式の根（０，０）の重複度を計算したもので，すべて正しい結果を与えてる．次に，３変数の連立代数方程式の根の重複度を求めた例をしめす．以下の例では，定数 cの除去は行わなかった．

例4．$f_1 = xy^2 - z^2 = 0$

$$f_2 = 2x^4 + xy^3 - 3xy - 6x - 2y^4 + y^2z - 2y^2 + 10y - z = 0,$$

$$f_3 = x^4 - 9x^3 + 2x^2y^2 + 4x^2z + 9x^2 - 4xy - 4xz + x + y^4 + 4y^3 + 5y^2 + 2yz - 4y + 2z^2 - 6z + 4 = 0$$

の根（1, 1, 1）の重複度．計算時間１１５．２７秒

数値計算で求めた根：（1.000000，1.000000，1.000000）

12.000000x － 12.000000y ＋ 0.60000000e-4z － 0.12000000e-3 ＝ 0

と曲線 $f_2 = 0$，$f_3 = 0$ の交点：

P_1(-0.9854153e-4 - 0.1341472e-13i,-0.1085416e-3 - 0.1341473e-13i,
-0.5941324e-5 - 0.2146933e-14i)

これに対して，根に近ずくQは一つで，それは

Q_{11}(-0.7094070e-4 + 0.3702292e-8i, 0.2947319e-4 + 0.1851294e-7i,
-0.5941488e-5 - 0.2414576e-13i)

したがって，無限小の程度を示す指数は 1.004615.

P_2(0.5719079e-4 - 0.1215229e-13i, 0.4718989e-4 - 0.1215212e-13i,
-0.1799254e-3 + 0.3363888e-13i)

これに対して，根に近ずくQは一つで，それは

Q_{21}(0.1068719e-4 + 0.3701980e-8i,-0.1853170e-3 + 0.1850906e-7i,
-0.1799171e-3 - 0.6324071e-12i)

したがって，無限小の程度を示す指数は 0.8777543

P_3(0.4207395e-5 - 0.3006564e-14i,-0.5792658e-5 - 0.3006514e-14i,
-0.1062731e-4 + 0.9940724e-14i)

これに対して，根に近ずくQは一つで，それは

Q_{31}(0.2935450e-5 + 0.3702415e-8i,-0.1215235e-4 + 0.1851199e-7i,
-0.1062730e-4 - 0.2940588e-13i)

したがって，無限小の程度を示す指数は 1.008342

P_4(0.5145907e-5 - 0.3978975e-15i,-0.4854051e-5 - 0.3978984e-15i,
0.8461878e-5 - 0.1660424e-15i)

これに対して，根に近ずくQ一つで，それは

Q_{41}(0.7099187e-5 - 0.3401127e-15i, 0.4912290e-5 - 0.1089731e-15i,
0.8461894e-5 - 0.1660423e-15i)

したがって，無限小の程度を示す指数は 0.9711513

以上より，無限小の指数の総和は，3.861863 で，重複度は４．

例５．$f_1 = x^4 - 3x^2y^2 + 5x^2yz - 3x^2y - 20x^2z + 14x^2 - xy^3 + 5xy^2z - 5xy^2 - xyz^2$
$+ xyz - 108xy + 2xz^3 - 6xz^2 - 32xz + 460x + y^4 - y^2z^2 - 14y^2 - 6yz^2$
$+ 22yz + 254y + z^4 -12z^3 - 20z^2 + 626z - 2286 = 0$

$f_2 = x^4 - 3x^3y + x^3 + 6x^2y^2 - 5x^2yz + x^2z^2 - 8x^2 + xy^2z - xy^2 - 2xyz^2$
$+ 2xyz + 111xy + 3xz^3 - 193xz + 513x + y^4 - y^3 + 2y^2z^2 + 2y^2z - 144y^2$
$+ 5yz^3 - 376yz + 1400y - 290z^2 + 2814z - 6890 = 0$

$f_3 = 4x^3 + 8xy^2 - 8xyz + 4xy + 4xz^2 - 15y^3 - 8y^2z + 4y^2 + 4yz^2 - 16yz$
$- 4y -4z^2 + 8z + 4 = 0$

の根（3, 2, 5）の重複度．計算時間４２．３１７秒

数値計算で求めた根：（3.000003, 2.000000, 4.999988)

24.000000x - 24.000000y + 0.60000000e-2z - 0.24000000e-1 = 0

と曲線 $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ の交点：

P_1(0.1048806e-2 + 0.0i, 0.4808840e-4 + 0.0i,-0.2871628e-2 + 0.0i)

これに対して，根に近ずくＱは三つで，それらは

Q_{11}(-0.2102087e-2 + 0.5278506e-24i, 0.3195529e-2 - 0.5272722e-24i,
-0.2862589e-2 - 0.1514203e-26i)

Q_{12}(0.1250875e-2 - 0.5129502e-24i,-0.1537592e-3 + 0.5123881e-24i,
-0.2872208e-2 + 0.1471459e-26i)

Q_{13}(0.2550774e-1 - 0.1707766e-25i,-0.2438404e-1 + 0.1705894e-25i,
-0.2941792e-2 + 0.4898930e-28i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.7893282, 1.189796, 0.4905538 で和は，1.142212

P_2(0.2155172e-2 - 0.1661825e-3i, 0.1155206e-2 - 0.1662955e-3i,
0.1356614e-3 - 0.451722e-3i)

これに対して，根に近ずくＱは三つで，それらは

Q_{21}(0.5755526e-3 - 0.1060466e-2i, 0.2729312e-2 + 0.7255572e-3i,
0.1350444e-3 - 0.4511213e-3i)

Q_{22}(0.1569525e-2 + 0.1017675e-2i, 0.1739311e-2 - 0.1346049e-2i,

0.1361157e-3 - 0.4512879e-3i)

Q_{23}(0.1269742e-1 + 0.1481344e-2i,-0.9351676e-2 - 0.1811872e-2i,

0.1378319e-3 - 0.4562406e-3i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.9929495, 1.045863, 0.6981816 で和は，1.405053

P_3(0.2155172e-2 + 0.1661825e-3i, 0.1155206e-2 + 0.1662955e-3i,

0.1356614e-3 + 0.451722e-3i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{31}(0.5755526e-3 + 0.1060466e-2i, 0.2729312e-2 - 0.7255572e-3i,

0.1350444e-3 + 0.4511213e-3i)

Q_{32}(0.1569525e-2 - 0.1017675e-2i, 0.1739311e-2 + 0.1346049e-2i,

0.1361157e-3 + 0.4512879e-3i)

Q_{33}(0.1269742e-1 - 0.1481344e-2i,-0.9351676e-2 + 0.1811872e-2i,

0.1378319e-3 + 0.4562406e-3i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.9929495, 1.045863, 0.6981816 で和は，1.405053

以上より，無限小の指数の総和は，7.9437 で，重複度は８．

例６．$f_1 = -(2x^3 - x^2yz - x^2y + x^2z^2 - 31x^2 - 2xy^2z + 2xy^2 - 2xyz^2 - xyz + 123xy + 2xz - 60x + y^3z - 6y^2 - 2yz^3 - 2yz^2 + 254yz - 1060y + 2z^3 + 37z^2 - 624z + 2055) = 0$

$f_2 = -(x^3y - 2x^3z - x^3 + x^2y + 79x^2 + xyz^2 - 58xy + 2xz^2 + 14xz - 297x + 2y^4 - y^3z - 2y^2z + 32y^2 + 62yz - 179y - z^3 + 11z^2 - 179z + 806) = 0$

$f_3 = x^4 - x^3y + x^3z + 2x^2y^2 + 2x^2y - 93x^2 + xyz^2 + xyz - 63xy - xz^2 - 39xz + 583x - 2y^3z + 42y^2 - 2yz^2 + 11yz - 17y + z^2 + 78z - 803 = 0$

の根 (3, 2, 5) の重複度．計算時間５３３．５７秒

数値計算で求めた根：（2.999991, 1.999987, 4.999996）

$24.000000x - 24.000000y + 0.60000000e{-3}z - 0.24000000e{-2} = 0$

と曲線 $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ の交点：

P_1(-0.1476643e-3 + 0.6279183e-14i, -0.2476671e-3 + 0.6282391e-14i,
-0.1125440e-3 + 0.1283186e-12i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{11}(-0.2582940e-2 + 0.1248861e-11i, 0.2188572e-2 - 0.1236822e-11i,
-0.1122699e-3 + 0.1278662e-12i)

Q_{12}(-0.3280380e-3 + 0.2561272e-13i, -0.6722207e-4 - 0.1306106e-13i,
-0.1125237e-3 + 0.1282933e-12i)

Q_{13}(-0.2726571e-4 - 0.1142992e-12i, -0.3681133e-3 + 0.1269100e-12i,
-0.1125575e-3 + 0.1283476e-12i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.6957039, 1.015011, 1.064601 で和は，2.775316

P_2(-0.4274222e-4 - 0.2441751e-3i, -0.1427693e-3 - 0.2441554e-3i,
-0.1081768e-2 + 0.7871484e-3i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{21}(-0.1083787e-1 + 0.5442384e-2i, 0.1065714e-1 - 0.5926496e-2i,
-0.1074563e-2 + 0.7725007e-3i)

Q_{22}(-0.2348126e-3 - 0.3946234e-3i, 0.4926330e-4 - 0.9358543e-4i,
-0.1081442e-2 + 0.7871601e-3i)

Q_{23}(0.9265871e-3 - 0.8388913e-3i, -0.1112569e-2 + 0.3501976e-3i,
-0.1082349e-2 + 0.7885547e-3i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.5147996, 1.010916, 0.8157182 で和は，2.341434

P_3(-0.4274222e-4 + 0.2441751e-3i, -0.1427693e-3 + 0.2441554e-3i,
-0.1081768e-2 - 0.7871484e-3i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{31}(-0.1083787e-1 - 0.5442384e-2i, 0.1065714e-1 + 0.5926496e-2i,

-0.1074563e-2 - 0.7725007e-3i)

Q_{32}(-0.2348126e-3 + 0.3946234e-3i, 0.4926330e-4 + 0.9358543e-4i,

-0.1081442e-2 - 0.7871601e-3i)

Q_{33}(0.9265871e-3 + 0.8388913e-3i,-0.1112569e-2 - 0.3501976e-3i,

-0.1082349e-2 - 0.7885547e-3i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.5147996，1.010916，0.8157182 で和は，2.341434

P_4(0.4934786e-4 + 0.3985555e-4i,-0.5065196e-4 + 0.3985529e-4i,

0.7178131e-5 - 0.1043782e-4i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{41}(-0.4230572e-5 + 0.6001226e-4i, 0.2924927e-5 + 0.1969428e-4i,

0.7177957e-5 - 0.1043711e-4i)

Q_{42}(-0.1859243e-5 + 0.3626074e-4i, 0.5554873e-6 + 0.4344602e-4i,

0.7177726e-5 - 0.1043731e-4i)

Q_{43}(0.6126399e-4 + 0.2125239e-3i,-0.6258188e-4 - 0.1328123e-3i,

0.7180019e-5 - 0.1043670e-4i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 1.011887，1.023593，0.8930571 で和は，2.928537

P_5(0.4934786e-4 - 0.3985555e-4i,-0.5065196e-4 - 0.3985529e-4i,

0.7178131e-5 + 0.1043782e-4i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{51}(-0.4230572e-5 - 0.6001226e-4i, 0.2924927e-5 - 0.1969428e-4i,

0.7177957e-5 + 0.1043711e-4i)

Q_{52}(-0.1859243e-5 - 0.3626074e-4i, 0.5554873e-6 - 0.4344602e-4i,

0.7177726e-5 + 0.1043731e-4i)

Q_{53}(0.6126399e-4 - 0.2125239e-3i,-0.6258188e-4 + 0.1328123e-3i,

0.7180019e-5 + 0.1043670e-4i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 1.011887，1.023593，0.8930571 で和は，2.928537

P_6(0.7465865e-4 - 0.5345677e-4i,-0.2534289e-4 - 0.5345553e-4i,
-0.6158907e-4 + 0.4967522e-4i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{61}(-0.3897596e-3 + 0.6449818e-4i, 0.4390650e-3 - 0.1713550e-3i,
-0.6156632e-4 + 0.4964489e-4i)

Q_{62}(0.1850945e-4 - 0.1012025e-3i, 0.3079844e-4 - 0.5706166e-5i,
-0.6158324e-4 + 0.4967537e-4i)

Q_{63}(0.8832496e-4 - 0.7071384e-4i,-0.3901037e-4 - 0.3620078e-4i,
-0.6158905e-4 + 0.4967696e-4i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.7999210，1.005135，1.137609 で和は，2.942665

P_7(0.7465865e-4 + 0.5345677e-4i,-0.2534289e-4 + 0.5345553e-4i,
-0.6158907e-4 - 0.4967522e-4i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{71}(-0.3897596e-3 - 0.6449818e-4i, 0.4390650e-3 + 0.1713550e-3i,
-0.6156632e-4 - 0.4964489e-4i)

Q_{72}(0.1850945e-4 + 0.1012025e-3i, 0.3079844e-4 + 0.5706166e-5i,
-0.6158324e-4 - 0.4967537e-4i)

Q_{73}(0.8832496e-4 + 0.7071384e-4i,-0.3901037e-4 + 0.3620078e-4i,
-0.6158905e-4 - 0.4967696e-4i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.7999210，1.005135，1.137609 で和は，2.942665

P_8(0.6041409e-4 + 0.1397983e-5i,-0.3958007e-4 + 0.1405425e-5i,
0.2335833e-3 + 0.2976659e-3i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{81}(-0.2023437e-3 - 0.2641735e-3i, 0.2231730e-3 + 0.2669706e-3i,

0.2336010e-3 + 0.2975256e-3i)

Q_{82}(0.2976993e-4 + 0.1673435e-4i,-0.8936596e-5 - 0.1393071e-4i,

0.2335716e-3 + 0.2976603e-3i)

Q_{83}(0.2282726e-2 + 0.2833847e-2i,-0.2261854e-2 - 0.2830979e-2i,

0.2332593e-3 + 0.2989889e-3i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.7913489, 1.041886, 0.553750 で和は，2.3869851

P_9(0.6041409e-4 - 0.1397983e-5i,-0.3958007e-4 - 0.1405425e-5i,

0.2335833e-3 - 0.2976659e-3i)

これに対して，根に近ずくQは三つで，それらは

Q_{91}(-0.2023437e-3 + 0.2641735e-3i, 0.2231730e-3 - 0.2669706e-3i,

0.2336010e-3 - 0.2975256e-3i)

Q_{92}(0.2976993e-4 - 0.1673435e-4i,-0.8936596e-5 + 0.1393071e-4i,

0.2335716e-3 - 0.2976603e-3i)

Q_{93}(0.2282726e-2 - 0.2833847e-2i,-0.2261854e-2 + 0.2830979e-2i,

0.2332593e-3 - 0.2989889e-3i)

したがって，無限小の程度を示す指数は，それぞれ 0.7913489, 1.041886, 0.553750 で和は，2.3869851

以上より，無限小の指数の総和は，23.9746 で，重複度は２４．

参考文献

[1] J.G. Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, 1949, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

[2] Robert J. Walker, Algebraic curves, 1950, Springer-Verlag